ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԺՈՂԿՈՄԽՈՐՀՐԴԻՆ ԿԻՑ ՊԵՏԱԿԱՆ ՁԵՌԱԳՐԱՏՈՒՆ (ՄԱՏԵՆԱԴԱՐԱՆ)

ԳԻՏԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

Երևան № 1 1941 թ.

ՄՈՆՈԳՐԱՖԻԿ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ТУМАНЯН Т. Г.

О ТАБЛИЦЕ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ А. ШИРАКАЦИ

Анания Ширакаци (или А. Ширакский) жил в VII в. нашей эры. Деятели древней Армении часто назывались по имени той области или местности, в которой они родились и жили. А. Ширакаци родился в области Ширак. Не удовлетворившись теми весьма скудными сведениями, которые дала ему церковная школа, А. Ширакаци жаждет получить глубокое образование, познать науку и в особенности математику, которая по его мнению, является матерью всех наук[1]. Не найдя в Армении подготовленного учителя и необходимых математических произведений, А. Ширакици отправляется в Византию и после долгих поисков находит в Трапезунде высоко-образаванного учителя в лице греческого ученого Тюхика. По свидетельству А. Ширакаци Тюхик учился в Афинах, много путешествовал и имел все без исключения сочинения по истории, философии, математике, искусству и медицине.

В течение 8-ми лет А. Ширакаци учился у Тюхика. Благодаря своим способностям, громадной энергии и настойчивости, он достиг своей цели и получил глубокие знания в области математики. В 668 году[2]) А. Ширакаци возвратился на родину в Армению и открыл там свою школу. В своей автобиографии[2]) он пишет:

«И я, ничтожный из Армении, изучил у него это могучее искусство, достойное царей и перенес его в нашу страну».

Из работ древних армянских авторов известно, что А. Ширакаци написал много ценных трудов по математике, астрономии, философии, грамматике и риторике, но подлинные рукописи его не дошли до нас, а сохранились большей частью лишь отрывки его произведений в рукописных сборниках позднейших переписчиков, притом с искажениями и пробелами в некоторых из них. Все же и по имеющимся произведениям можем заключить, что А. Ширакаци был выдающимся, всесторонним ученым своего времени, носителем и проводником в Армении богатейшей эллинской культуры. Его высказывания порою шли в раз-

1) Проф. Патканян К.—«Из оставшихся произведений А. Ширакаци», С. Петербург, 1877 г., стр. 3 (на армянском языке).

²) Рукопись № 4066 (1283 года) стр. 10 (б), Ереван, Государственное Хранилище древних рукописей (Матенадаран) при Совпаркоме Армянской ССР.

²) Проф. Патканян К.—„Из оставшихся произведений А. Ширакаци", С. Петербург, 1877., стр. 3 (на армянском языке).

рез с господствовавшими в то время религиозными догмами, вследствие чего церковники игнорировали его труды и подвергали преследованиям автора. В историю Армении А. Ширакаци вошел, главным образом, как крупный математик древнего времени.

Из трудов А. Ширакаци математического характера изданы на армянском языке «Меры и весы», «Вопросы и решения», «Учебник арифметики» и «Задачи-развлечения».

Не опубликованы еще в Советском Союзе отрывок перевода А. Ширакаци «Начал» Евклида[1]) и таблица полигональных чисел[2]).

Академик И. А. Орбели в 1918 г. перевел на русский язык и издал «Вопросы и решения» с историко-географическими пояснениями.

Есть полное основание полагать,что указанными произведениями не исчерпывается список математических трудов А. Ширакаци ибо среди десятков тысяч древних рукописей, разбросанных в ряде библиотек (в Ереване, Венеции, Вене, Иерусалиме и др.) многие рукописи еще недостаточно изучены и в особенности те,которые содержат математический материал. Так, например, лишь в 1939 г. в Государственном Хранилище древних рукописей при Совнаркоме Армянской ССР (Матенадаран) был выявлен «Учебник арифметики» А. Ширакаци[3]).

Вопрос о том, на каком уровне вообще находилась математика в древней Армении до А. Ширакаци и какова математическая значимость каждого из его произведений, не имел до сих пор освещения в печати и должен быть предметом специального исследования на основе изучения рукописей, содержащих математические работы и отдельные материалы. Интересуясь этим вопросом, я имел возможность изучать в рукописях математические труды А. Ширакаци.

Предметом настоящей статьи является его таблица полигональных чисел. Прежде чем перейти к рассмотрению этой таблицы, нелишне вкратце остановиться на способе числового обозначения у древних армян.

В древней Армении, как и в Греции в качестве числовых знаков употребляли буквы алфавита. Для отличия числовых букв от обыкновенных над последними проводили горизонтальную черточку или же до и после буквенного обозначения числа ставили точку. Числа писались аддитивным методом, слева направо, начиная с большего. Число 10000 называлось «бюр»-ом. Знак, поставленный сверху буквы с правой стороны указывал, что число, обозначенное буквой нужно увеличить в 10000 раз, то есть взять соответствующее число «бюр»-ов. Этот знак впервые ввел в употребление А. Ширакаци и таким образом значительно облегчил обозначение крупных чисел. Иногда число «бюр»-ов отделялось от единиц следующих низших порядков двумя акцентами, поставленными сверху буквы с правой стороны[4]).

Ниже приводится таблица, содержащая буквы армянского алфавита с указанием их числовых значений.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Единицы . .	Ա	Բ	Գ	Դ	Ե	Զ	Է	Ը	Թ
Десятки . . .	Ժ	Ի	Լ	Խ	Ծ	Կ	Հ	Ձ	Ղ
Сотни	Ճ	Մ	Յ	Ն	Շ	Ո	Չ	Պ	Ջ
Тысячи . . .	Ռ	Ս	Վ	Տ	Ր	Ց	Ւ	Փ	Ք

[1]) Рукопись № 4166 (XIII века) стр. 208 (а)—209 (а). Ереван, древних рукописей Армянской ССР.

[2]) Рукопись № 1770 (1589.) стр. 386 (а) Ереван. Гос. Хран. др. рукоп. (Матенадаран)

[3]) „Учебник арифметики“ опубликован научным сотрудником Матенадарана Абрамяном А. в XI томе (за 1939 г.) „Научных трудов Ереванского Госуниверситета“.

[4]) Рукопись № 699 (ХУП в.), стр. 195 (а). Ереван, Государсвенное Хранилище древних рукописей при Совнаркоме Армянской ССР.

Каждая буква таблицы содержит столько единиц указанного слева разряда, сколько показывает соответствующая цифра верхнего ряда; последняя буква алфавита обозначает 9000.

Например:

Ս̅ի̅գ̅ или .սիգ. означает 2023

.խ̂զ̂ւոա. или. խ̋զ̋ւոա. означает 46701

В ряде рукописей сотни, тысячи, десятки тысяч и т. д. пишутся при помощи букв, служащих для обозначения единиц низшего порядка. Например:

դ̅ռ̅ =4000 вместо տ̅; .ըռզճ.=8600 вместо .փն.; .մգռզճբ.=203602 вместо .ի̂վնբ., то есть пишется 203000 посредством трех букв (200, 3, 1000) вместо одной буквы с помощью знака «бюр»-а и буквы, означающей прямо 3000, а 600 обозначается двумя буквами — 6 и 100— вместо одной буквы, означающей 600.

В древней Армении не имели никаких знаков для обозначения арифметических действий[1]). Два слагаемых и сумма писались рядом без всяких знаков, так же и в действии умножения. При вычитании сначала писалось вычитаемое, а затем рядом писались уменьшаемые и разность.

В древних армянских рукописях встречаются лишь дроби с числителем, равным единице. Такие дроби обозначались посредством знаменателя с приставкой к нему сверху с левой стороны знака, похожего на знак «бюр»-а. Нередко над знаменателем с левой стороны ставилась вертикальная черточка. Дробь $^1/_2$ обозначалась через 0 или с.[2])

Например:

զ̂ $=\frac{1}{6}$; խ̂գ $=\frac{1}{43}$; ի̅գ̅ с $=23\frac{1}{2}$; ժ̅ գ̂ ե̂ ժ̂ $=$

$=10\frac{1}{3}\frac{1}{5}\frac{1}{10}\left(=10\frac{19}{30}\right)$ или ժ 'գ'ե'ժ $=10\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{10}$

Таблица полигональных чисел А. Ширакаци взята из рукописи № 1770, стр. 386 (а), находящейся в Госхранилище древных рукописей при СНК Арм. ССР.

В конце стр. 385 (б) рукописи имеется заголовок: «Обращение Анании к ученикам и глава первая». В этом обращении А. Ширакаци кратко и выразительно сообщает своим ученикам о том, что он хочет преподать им числительное искусство и начнет сперва с наиболее легкого, именно со сложения чисел. Этим обращением заканчивается стр. 385 (б).

На стр. 386 (а) приводится без указания автора таблица полигональных чисел. Таблица не сопровождается никакими пояснениями.

На стр. 386 (б) помещен материал, к математике совершенно не относящийся.

Страницы 387 (а)—391 (б) посвящены операциям сложения, вычитания и умножения целых чисел без указания автора.

На стр. 392 (а) имеется запись: «Об угольных числах священника Ованеса» и далее следует краткое сообщение об этих числах.[3])

На стр. 392 (б)—393 (а) приводится таблица полигональных чисел Ованеса до 14-ти угольных включительно. Далее, на следующих страницах излагается не математический материал.

Сопоставление текстов в этой и других рукописях дает полное основание считать, что 3 действия над целыми числами («учебник арифметики») и таблица чисел стр. 386 (а) принадлежат Анании Ширакаци.

Таблица А. Ширакаци воспроизводится здесь в том виде, в каком она дана в рукописи. Заголовки колонок переведены с древне-армянского на русский язык. Числа таблицы обозначены в рукописи тем способом, о котором сказано выше.

Таблица А. Ширакаци довольно обширная и заключает в себе все основные классы чисел, которые являлись предметом изучения в древней Греции.

---

[1]) Рукопись № 1770 (1589 г.) стр. 387 (а)—391 (б) и другие рукописи, Ереван Гос. Хран. древних рукописей (Матенадаран).

[2]) Для дроби $^1/_2$ греки имели знак, похожий на L, на с, а также на S (см. Г. Фаццари „Краткая история математики", стр. 26, Москва 1923 г.

[3]) Ованес—известный армянский математик XII века.

Прямо-угольные	Треуголь-ные	Лишние четыре-угольные	Четыре-угольные	Лишние пятиуголь-ные	Пятиуголь-ные	Лишние шестиу-гольные	Шести-угольные	Лишние семиуголь-ные	Семи-угольные	Четные	Суммы четных	Нечетные	Кубы	Особые кубы	Утроенные	Удвоенные	Учет-веренные
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	8	9	1	1	1
2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	4	6	3	16	18	3	2	4
3	6	5	9	7	12	9	15	11	18	6	12	5	24	27	9	4	16
4	10	7	16	10	22	13	28	16	34	8	20	7	32	36	27	8	64
5	15	9	25	13	35	17	45	21	55	10	30	9	40	45	81	16	256
6	21	11	36	16	51	21	66	26	81	12	42	11	48	54	243	32	1024
7	28	13	49	19	70	25	91	31	112	14	56	13	56	63	727	64	4096
8	36	15	64	22	92	29	120	36	148	16	72	15	64	72	2187	128	
9	45	17	81	25	117	33	153	41	186	18	90	17	72	81	6561	256	
10	55	19	100	28	145	37	190	45	232	20	110	19	80	90		512	
11	66	21	121	31	176	41	231	51	283	22	132	21	88	99			
12	78	23	144	34	210	45	276	56	339	24	156	23	96	108			
13	91	25	169	37	247	49	325	61	400	26	182	25	104	117			
14	105	27	196	40	287	53	378	66	466	28	210	27	112	126			
15	120	29	225	43	330	57	435	71	537	30	240	29	120	135			
16	136	31	256	46	376	61	496	76	613	32	272	31	128	144			
17	153	33	289	49	425	65	561	81	694	34	306	33	136	153			
18	171	35	324	52	477	69	630	86	780	36	342	35	144	153			
19	190	37	361	55	532	73	703	91	871	38							

Естественно, что А. Ширакаци, получивший основательное математическое образование в Византии, пропитанный греческой культурой, занимался вопросами арифметики и преподавал ее в своей школе («перенес магучее искусство в свою страну»). Надо полагать, что к таблице был приложен объяснительный текст, но до нас не дошел.

Главную часть таблицы составляют полигональные числа, которым в древней Греции еще со времени Пифагора, уделяли большое внимание. О полигональных числах весьма подробно писал в своем сочинении «Введение в арифметику» Никомах Геразский (из города Геразы в Аравии), живший окол о100 г. нашей эры. Никомах первый составил арифметическое учение, как самостоятельный предмет без геометрических представлений. Его «Введение в арифметику» пользовалось огромной популярностью и являлось классическим сочинением для изучения арифметики в течение столетий [1]). Таблица А. Ширакаци дает основание думать, что сочинение Никомаха было также хорошо известно и в Армении.

В первом столбике таблицы содержится натуралный ряд чисел от 1 до 19 включительно под названием прямоугольные. Этот термин не встречается в дошедших до нас сочинениях древних математиков, писавших о полигональных числах (Никомах, Диофант). Эти «прямоугольные» числа служат «коренными» числами (как называли их древние авторы), для образования треугольных чисел, помещенных в таблице А. Ширакаци во втором столбике, вслед за прямоугольными. Как известно, всякое треугольное число получается в результате суммирования соответвующего количества чисел натурального ряда, начиная от 1.

[1]) М. Е. Ващенко-Захарченко, „История математики" том I. Киев. 1883 г., стр. 122—126.

Поэтому, применяя формулу суммы членов арифметической прогрессии к натуральному ряду чисел

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ....

будем иметь для k-го треугольного числа:

$$a_k = \frac{(k+1)}{2} \text{ .... } (1)$$

Полагая в формуле (1) k равным последовательно числам

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...,

получим соответствующие треугольные числа:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 .....

Не останавливаясь далее подробно на изложении способа образования четырехугольных, пятиугольных и вообще полигональных (многоугольных) чисел и на их геометрической интерпретации[2]), скажем, что для получения k-го n-угольного числа необходимо взять сумму K членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен 1, а разность равна n-2, то есть

$$a_k = \frac{[2+(n-2)(k-1)]}{2} \text{ .....} (2)$$

где: $K=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots$

$n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\ldots$

При $n=3$ из формулы (2) получим (1).

При $n=4$ получим

$a_k = k^2$—выражение k-го четыреугольного числа.

При $n=5$ получим

$a_k = \frac{k(3k-1)}{2}$ —выражение k-го пятиугольного числа

и т. д.

Производя соответствующие подстановки, мы можем получить все полигональные числа, помещенные в таблице А. Ширакаци.

[2]) Ниже приводится наглядное изображение полигональных чисел по G. Wertheim-y «Die arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria», Leipzig 1890.

В таблице имеются столбики с заголовками: лишние четыреугольные, лишние пятиугольные и т. д... Эти „лишние полигональные числа“ представляют арифметические прогрессии, начинающиеся с 1 и с разностью 2, 3, 4, 5... Из этих вспомогательных рядов образуются соответстующие полигональные числа. Каждый такой ряд называется также рядом гномонов, так как каждое, вновь прибавляемое к полигональному числу гномонное число, превращает его в следующее высшее. Повидимому, автор таблицы, не желая вводить греческого термина и в то же время не имея точного армянского, назвал для краткости обозначения в таблице эти гномонные числа лишними полигональными (по армянски „աւելորդ“ значит лишний). Этим названием А. Ширакаци имел в виду отличить гномонные числа от полигональных. В этих же целях, повидимому, числа натурального ряда, то-есть гномонные числа для получения треугольных чисел, автор называет в отличие от последних прямоугольными, не вкладывая в данном случае в это понятие геометрического содержания.

С методической стороны для ясного представления способа образования полигональных чисел, является естественным и правильным помещение в таблице арифметических прогрессий.

После полигональных чисел в таблице стоят числа четные, суммы четных и нечетные числа. Четным и нечетным числам в древнее время придавали большое значение и они нашли себе место в таблице.

Не менее важное значение придавали и так называемым гетеромекным числам (ἑτερομήκης), то есть числам, находящимся в столбике под заголовком суммы четных. Никомах во „Введении в арифметику“ подробно останавливается на этих числах[1]).

[1]) Nicomachus of Gerasa, Introduction to Arithmetic“, Book II. chapter XVII. XVIII, XX, New York, 1926.

В своей таблице А. Ширакаци называет их զուժլ գարբ, то-есть суммы четных, что вполне соответствует характеру образования этих чисел. Действительно, сложив два первых четных числа, получим 2-ое гетеромекное число 6, сложив 3 первых четных числа, получим третье гетеромекное число 12 и т. д.. Гетеромекные числа можно образовать другим способом, а именно, перемножив попарно последовательные числа натурального ряда:

$1.2=2$; $2.3=6$; $3.4=12$; $4.5=20$; $5.6=$ $=30$ и т. д.

Следовательно общее выражение гетеромекных чисел есть $m(m+1)$.

После нечетных чисел в таблице следуют „кубы“. В тексте рукописи числа столбика названы по армянски „քուեայք“ то есть кубы. Однако, эти числа кроме 8 и 64 не являются кубами целых чисел. Очевидно, автор имел ввиду определенные числа из общего класса телесных чисел и название взятых им чисел впоследствии искажено переписчиком рукописи. Можно также допустить, что автор таблицы хотел показать числа кратные куба 2-х, общее выражение каторых 2^3m.

Рядом с этими числами А. Ширакаци поместил числа вида 3^2m под названием „особые кубы“ (по армянски պատնձ-նեալ քուեայք). Если учесть, что греческая арифметика была известна А. Ширакаци, то станет ясным, что подразумевал автор под „особыми кубами“. Числа вида a^2m, к которому относятся рассматриваемые числа, по определению Никомаха представляют промежуточные кубические фигуры между кубами и „кубическими фигурами, у которых измерения повсюду не равны друг другу“ то есть „клиньями“.[2]

Эти промежуточные фигуры Никомах называет кирпичами и балками, которые

[2]) Там же, Book II, chapter XVI, 253–254.

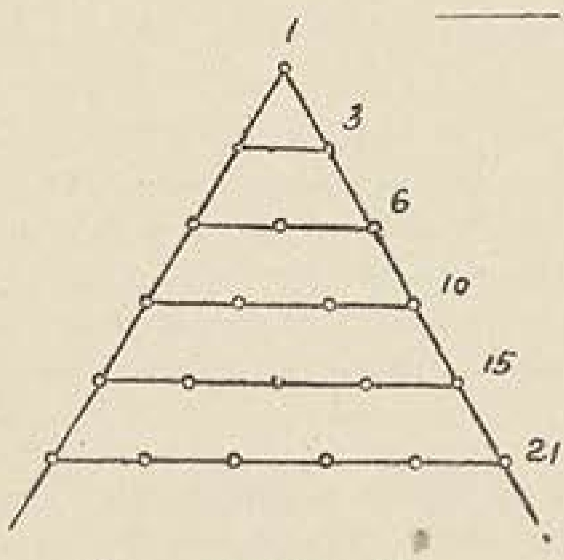
автор таблицы, повидимому, имел в виду под „особыми кубами".

Последние три столбика таблицы представляют геометрические прогрессии, начинающиеся с 1, со знаменателями, равными соответственно 3, 2 и 4. Эти ряды чисел показывают, что в древней Армении имели понятие о геометрической прогрессии. Однако, нет пока данных о том, как далеко простирались сведения о прогрессии и в какой мере пользовались ею.

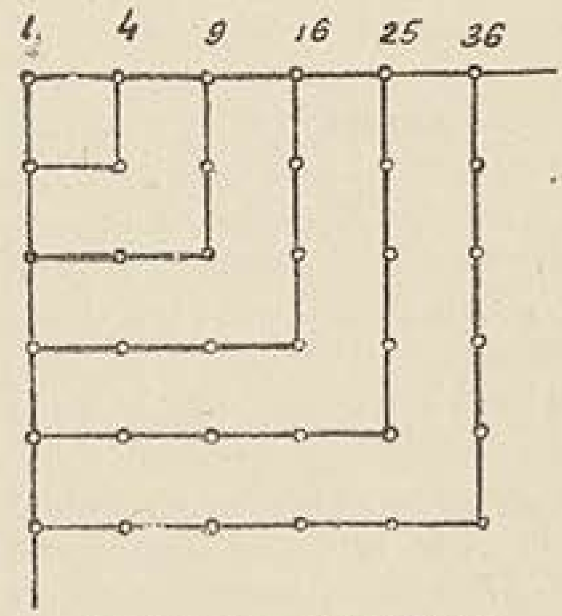
В заключение следует отметить, что таблица А. Ширакаци охватывает разнообразные виды чисел, составлена отчетливо и, повидимому, служила ценным наглядным пособием при преподавании арифметики. Автор таблицы, как видно, не стремился слепо перенести греческие термины на армянскую почву, а старался в армянском языке находить соответствующие названия.

Таблица А. Ширакаци свидетельствует о том, что арифметические знания в Армении в VII веке стояли на высоком уровне.

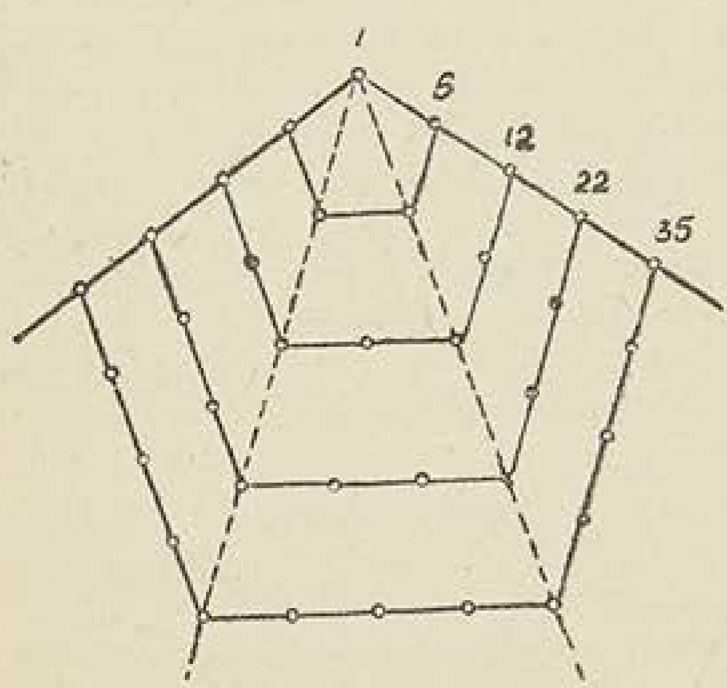
НАГЛЯДНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ



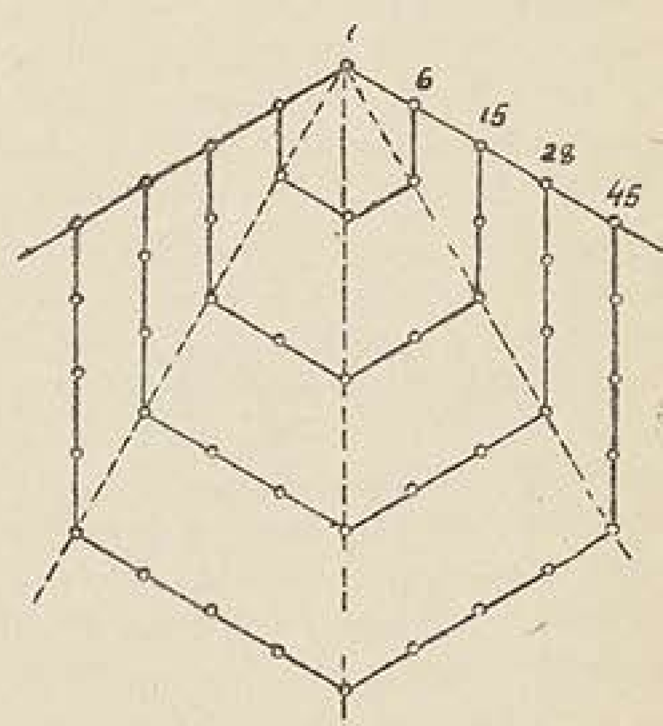
Треугольные числа



Четыреугольные числа



Пятиугольные числа



Шестиугольные числа